UNIVERSITE ABDELMALEK ESSADI
Ecoles National des Sciences Appliqués
Tétouan

Année universitaire 2010/2011
1ère année CP

TD de Physique 3
(Série 1)

Exercice 1

Deux particules sont situés à un instant donné en $\vec{r}_1 = 4\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y + 8\,\vec{e}_z$ et $\vec{r}_2 = 2\,\vec{e}_x + 10\,\vec{e}_y + 5\,\vec{e}_z$

1-Ecrire l'expression du déplacement $\vec{r}$ de la particule 2 par rapport à la particule
2- Utiliser le produit scalaire pour trouver la longueur de chaque vecteur.
3- Calculer la projection de $\vec{r}$ sur $\vec{r}_1$

Exercice 2

Soit un parallélépipède dont les arrêtes sont décrites par $\vec{r}_1 = \vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y$, $\vec{r}_2 = 4\,\vec{e}_y$ et $\vec{r}_3 = \vec{e}_y + 3\,\vec{e}_z$ à partir de l'origine. Trouver le volume de ce parallélépipède.

Exercice 3

Etant donné 3 vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, exprimés dans la base cartésienne.

1- Calculer les composantes du double produit vectoriel $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$
2- En déduire la relation : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A}.\vec{B})$
3- Retrouver la relation : $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{B}\,(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{A}(\vec{B}.\vec{C})$

Exercice 4

Dans le système cartésien, on donne le vecteur $\vec{V} = (1, 2, 3)$ dont la direction passe par le point A (3, 4, 2).

Calculer son moment par rapport à l'origine et par rapport aux trois axes du système cartésien.



Exercice 5

Soient $\vec{r}_1\,(r_1, \theta_1, \varphi_1)$, et $\vec{r}_2\,(r_2, \theta_2, \varphi_2)$, deux vecteurs quelconques. Montrer que l'angle θ_{12} entre $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ est donné par : $\cos\theta_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2$
Calculer la longueur de $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Exercice 6

Soient les vecteurs : $\overrightarrow{OA} = 5\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y - 7\,\vec{e}_z$, $\overrightarrow{OB} = -3\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y + 6\,\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{OC} = 5\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y + 7\,\vec{e}_z$
Exprimés dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
Par une manipulation directe, déterminer s'il y'a une différence entre :

- les produits vectoriels : $\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \wedge \overrightarrow{OC}$

- les produits mixtes : $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}$ et $(\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB}$

Exercice 7

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\ddot{X} - \omega^2 X = \cos\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

ω est une cste positive

Où α est un paramètre constant.

1- Trouver la solution de l'équation différentielle sans second membre de (1)
2- Montrer que cette solution peut se mettre sous la forme :
$$X(t) = B_1\, ch\, \omega t + B_2\, sh\, \omega t$$
Où B_1 et B_2 sont des constantes
3- Chercher la solution générale de l'équation (1), en utilisant les conditions initiales suivantes :
A $t = 0$, $X = 0$ et $\dot{X} = 0$



TD. physique 3 , serie 1 :

Ex 1 :

L'expression du deplacement $\vec{r}$ de la particule 2 % à 1.

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$= (2\vec{e}_x + 10\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) - (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 8\vec{e}_z)$

$= (-2\vec{e}_x + 7\vec{e}_y - 3\vec{e}_z)$

2- on sait que $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = \|\vec{r}_1\|^2$

$\|\vec{r}_1\| = \sqrt{89} = 9,43$

$\|\vec{r}_2\| = \sqrt{129} = 11,36$

3- La projection de $\vec{r}$ sur $\vec{r}_1$

$x = \vec{r} \cdot \vec{e}_{r_1}$ où $\vec{e}_{r_1}$ est le vecteur unitaire associé au vecteur r_1

$\vec{e}_{r_1} = \frac{\vec{r}_1}{\|r_1\|} \Rightarrow x = \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}_1}{\|r_1\|} \Rightarrow x = \frac{-11}{9,43} = -1,66.$

Ex 2.

Rappel. le produit vect :

Le mode $(\vec{r} \wedge \vec{r}_2)$ est tt simplement l'air du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$

En effet.

$\|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\| = r_1 r_2 \sin\theta$

Le volume d'un parallépipède formé par $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ est : $\vec{r} \wedge (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$.

en considérant que $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ forment la base

En effet.

$V = r_3 \cdot W \cdot \cos(\vec{r}_3 \cdot \vec{W}) = W\, r_3 \cos\alpha.$

Calcul du volume $V = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Ex 4 :

$\vec{M}_o(\vec{v}) = \vec{OA} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\vec{M}_{ox}(\vec{v}) = \vec{i} \cdot \vec{M}_o(\vec{v}) = 8$ $(O \in ox)$
- $\vec{M}_{oy}(\vec{v}) = \vec{j} \cdot \vec{M}_o(\vec{v}) = -7$
- $\vec{M}_{oz}(\vec{v}) = \vec{k} \cdot \vec{M}_o(\vec{v}) = 2$

Ex 3 :

1 – $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$
$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$
$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \vec{i}(B_y C_z - B_z C_y) - \vec{j}(B_x C_z - B_z \cdot C_x) + \vec{k}(B_x C_y - B_y C_x)$$

$\vec{B} \wedge \vec{C} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_y Z - Y A_z) - \vec{j}(Z A_x - X A_z) + \vec{k}(Y A_x - X A_y)$$

2 – $\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$
$= \vec{B}(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - \vec{C}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$

⇒ En remplaçant $\vec{B}$ et $\vec{C}$ par leurs exp. on trouve après des manipulation
la question trouvée en ①

3 – $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$
$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = -\vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -[\vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A})]$
$= \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B})$
$= \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$

Ex 5 :

$\vec{r}_1(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ $\vec{r}_2(r_2, \theta_2, \varphi_2)$



où rappelle que :

$$x_1 = r_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1 \qquad x_2 = r_2 \sin\theta_2 \cos\varphi_2$$

$$y_2 = r_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1 \qquad y_2 = r_2 \sin\theta_2 \sin\varphi_2$$

$$z_1 = r_1 \cos\theta_1 \qquad z_2 = r_2 \cos\theta$$

$$\vec{r_1}\cdot\vec{r_2} = r_1 \cdot r_2 \cos\theta_{12}$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2$$
$$+ r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

$$= r_1 r_2 (\sin\theta_1 \sin\theta_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) +$$
$$r_1 r_2 \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot = r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$
$$r_1 r_2 \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot = r_1 \cdot r_2 \cos\theta_{12}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2 .$$

$$\| \vec{r_1} - \vec{r_2} \| = ?$$

$$\vec{r_1} - \vec{r_2} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$$

$$\| \vec{r_1} - \vec{r_2} \|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 .$$

$$= (r_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1 - r_2 \sin\theta_2 \sin\varphi_2)^2 + (r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_1)^2$$

$$= r_1^2 \sin^2\theta_1 \cos^2\varphi_1 + r_2^2 \sin^2\theta_2 \cos^2\varphi_2 - 2 r_1 \cdot r_2 \sin\theta_1 \cos\varphi_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_2$$
$$+ r_1^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\varphi_1 + r_3^2 \sin^2\theta_2 \sin^2\varphi_2 - 2 r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\varphi_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot$$
$$\sin\varphi_2 + r_1^2 \cos^2\theta_1 + r_2^2 \cos^2\theta_2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 .$$

$$= r_1^2 \sin^2\theta_1 + r_2^2 \sin^2\theta_2 \cdot 2 r_1 \cdot r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + r_1^2 \cos^2\theta_1 +$$
$$r_2^2 \cos^2\theta_2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_3 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 \cdot r_2 (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdot$$
$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2)$$

$$\| \vec{r_1} - \vec{r_2} \| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta_{12}}$$



Ex 7

$$\ddot{x} - w^2 x = \cos \alpha \quad (1)$$

$r^2 - w^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = w \ , \ r_2 = -w$

Donc $x_{ssm}(t) = Ae^{wt} + Be^{-wt}$

2- Mq $x_{ssm}(t) = B_1 \, ch \, wt + B_2 \, sh \, wt$

$ch \, wt = (e^{wt} + e^{-wt}) \cdot \frac{1}{2}$

$sh \, wt = \frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2}$

$sh \, wt + sh \, wt = e^{wt}$

$ch \, wt - sh \, wt = e^{-wt}$

* Alors $x_{ssm}(t) = A(ch \, wt + sh \, wt) + B(ch \, wt - sh \, wt)$

$= (A+B) \, ch \, wt + (A-B) \, sh \, wt = B_1 \, ch \, wt + B_2 \, sh \, wt$

Avec $B_1 = A+B$. et $B_2 = A-B$

on sait que: $x_g(t) = x_{ssm}(t) + x_p(t)$ alors.

$x_g(t) = B_1 \, ch \, wt + B_2 \, sh \, wt - \frac{\cos\alpha}{w^2} \ / \ x_p = -\frac{\cos\alpha}{w^2}$

on cherche. mnt B_1 et B_2 selon $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$

à $t = 0$.

$B_1 \cdot ch(0) + B_2 \, sh(0) - \frac{\cos\alpha}{w^2} = 0$

$\Rightarrow B_1 - \frac{\cos\alpha}{w^2} = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{\cos\alpha}{w^2}$ et

$\dot{x}(t) = B_1 w \, sh \, wt + B_2 w \, ch \, wt$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$

Alors $x_g(t) = \frac{\cos\alpha}{w^2}$

Ex 8 .

$\frac{dx}{dt} - e^{t+x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^{t+x}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t \cdot e^x \Rightarrow \frac{dx}{e^x} = e^t \, dt$

$\Rightarrow \int e^{-x} dx = \int e^t \, dt \Rightarrow -e^{-x} = e^t + C$

$\Rightarrow e^{-x} = -e^t + C_1$

$\Rightarrow \ln(e^{-x}) = \ln(-e^t + C_1)$



2) $\frac{dx}{dt} + x - e^{t} + 1 = 0$

$$\frac{dx}{dt} + x\, f(t) = g(t)$$

$\frac{dx}{dt} + x - e^{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} + x = e^{t} - 1$

on resoud l'eq. SSM : $\frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -dt$.

$\Leftrightarrow \ln x = -t + C$

$$\Rightarrow x = e^{-t+C} = \lambda e^{-t}.$$

La nouvelle fct. $x(t)$:

$x(t) = \lambda(t) \cdot e^{-t} \Rightarrow (1)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{d(\lambda(t) \cdot e^{-t})}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d\lambda(t)}{dt} e^{-t} - \lambda(t) \cdot e^{-t}$.

$\frac{d\lambda(t)}{dt} e^{-t} = e^{t} - 1$

$\frac{d\lambda(t)}{dt} = e^{t}(e^{t} - 1) \Rightarrow \lambda(t) = \int e^{2t} - e^{t}$

$\Rightarrow \lambda(t) = \frac{1}{2} e^{2t} - e^{t} + c \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} e^{2t} - e^{t} + c\right) e^{-t}$.

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} e^{t} + ce^{-t} - 1$

3) $t\frac{dx}{dt} + 2x e^{t}$, l'eq. SSM $\Rightarrow x(t) = \frac{c}{t^2}$

- Apres application de la methode de la variation de la cte. et en utilisant les cond. initiales. $x(t) = \frac{e^{t}(t-1)}{t^2}$

4) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = \sin t$.

on resoud l'eq. SSM. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0$

$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r = 1$ ou $r = -2$

$x(t) = a e^{t} + b e^{-2t}$.

$x_p(t) = a \cos t + b \sin t$.

$\frac{dx_p}{dt} = -a \sin t + b \cos t \Rightarrow \frac{d^2 x_p}{dt^2} = -a \cos t - b \sin t$.

$= -(b + 3a) \sin t + (a - 3b) \cos t = \sin t$.

$a = 3b$, $\begin{cases} -b - 3a = 1 \\ a - 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{10} \\ b = \frac{-1}{10} \end{cases}$.

$-\frac{3}{10} \sin t - \frac{1}{10} \cos t$

$\$$ general est $x_g(t) = Ae^{t} + Be^{-2t} - \frac{3}{10} \sin t - \frac{1}{10} \cos t$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$x_g(t) = \frac{1}{6} e^{t} - \frac{1}{15} e^{-2t}.$

Serie 2 :

Ex 1 :

$\vec{\gamma} = e^{-t}\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j} - 3\cos t\,\vec{k}$

A $t=0$ $\quad \vec{OM} = \vec{i} + 3\vec{k}$

$\vec{V}_0 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$

$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$

$\frac{dV_x}{dt} = e^{-t} \Rightarrow V_x = \int e^{-t} = e^{-t} + 2$

$V_y = 5\int \sin t = -5\cos t + C \quad , C = 7$

$V_z = -3\int \cos t = -3\sin t + C \quad , C = -1$

$\vec{V} = (-e^{-t} + 2)\vec{i} + (-5\cos t + 7)\vec{j} - (3\sin t + 1)\vec{k}$

on a $V_x = -e^{-t} + 1$

$V_y = -5\cos t + 2 \Rightarrow V_z = -3\sin t - 1$

$\Rightarrow x = \int(-e^{-t} + 2)dt = e^{-t} + 2t + 1$

$\Rightarrow y = \int -5\cos t + 7t + y_0$

$y = -5\sin t + 7t$

$z = \int(-3\sin t - 1)\,dt = 3\cos t - t + C, \quad C = 0$

donc :

$\vec{OM} = (-e^{-t} + 2t + 1)\vec{i} + (-5\sin t + 7t)\vec{j} - (3\cos t - t)\vec{k}$

